E.N.S.E.T. 1985

Section A_2

Durée : 4 heures

On se propose d'étudier l'évolution de la température d'un local (pour $t \geqslant 0$) en tenant compte de la température extérieure $\varphi(t)$ à l'instant t, de l'apport de puissance calorifique de la chaudière $\psi(t)$ à l'instant t et d'un coefficient d'isolation du local, noté x et supposé invariant au cours du temps et positif ou nul. On suppose φ continue et ψ positive ou nulle, continue sauf peut-être en un instant $a > 0$ où elle admet des limites à droite et à gauche.

On admet que la température à l'instant t du local, $\theta(x, t)$ est une fonction continue de t, dérivable en $t \neq a$ et vérifiant :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) = -x[\theta(x, t) - \varphi(t)] + \psi(t) \qquad t \neq a$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0$$

où θ_0 est un réel donné indépendant de x.

A

1° Montrer que *pour tout* $t \geqslant 0$,

$$\theta(x, t) = \theta_0 e^{-xt} + \int_0^t e^{-x(t-s)} [x\varphi(s) + \psi(s)]\, ds.$$

2° On suppose (seulement dans cette question) que φ et ψ sont périodiques de période T (c'est-à-dire $\varphi(t + T) = \varphi(t)$, $\psi(t + T) = \psi(t)$ $\forall t \geqslant 0$).

a. Montrer que si $\theta(x, T) = \theta_0$ alors $\theta(x, \cdot) : t \to \theta(x, t)$ est périodique.

b. Montrer, dans tous les cas, que $\theta(x, T + t) - \theta(x, t)$ tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

3° Si f est une fonction intégrable sur tout intervalle borné, on pose : $F_0(x, t) = f(t)$ puis, par récurrence,

$$F_{n+1}(x, t) = \int_0^t e^{-x(t-s)} F_n(x, s)\, ds.$$

Démontrer que $F_{n+1}(x, t) = \int_0^t e^{-x(t-s)} \frac{(t-s)^n}{n!} f(s)\, ds.$

4° Pour t fixé, donner le développement limité de $\theta(\cdot, t) : x \to \theta(x, t)$ au voisinage de 0 et à l'ordre n. On notera $\theta_n(x, t)$ le polynôme (en x) ainsi trouvé. (On utilisera les fonctions Φ_n et Ψ_n données par :

$$\Phi_n(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} \varphi(s)\, ds ; \quad \Psi_n(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} \psi(s)\, ds,$$

dont on précisera la signification mathématique.)

5° Démontrer que, pour (x, t) fixé, on a $\lim_{n \to +\infty} \theta_n(x, t) = \theta(x, t)$ et en déduire que $\theta(\cdot, t)$ est développable en une série entière (en x) dont on précisera le rayon de convergence.

6° Montrer que, pour $t > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \theta(x, t) = \varphi(t)$. (On utilisera la continuité de φ au point t; si le candidat n'y parvient pas, il pourra alors supposer φ continûment dérivable.)

B

On se propose dans cette partie d'étudier les variations de $\theta(x, t)$ en fonction du paramètre x. On supposera que $\theta_0 > \varphi(0)$.

1° On pose $\Delta(x, y, t) = e^{xt}[\theta(x, t) - \theta(y, t)]$

a. Calculer $\frac{\partial \Delta}{\partial t}(x, y, t)$. (On fera apparaître le terme : $\theta(y, t) - \varphi(t)$.)

b. En déduire que si pour $b > 0$, $x_0 > 0$ on a $\theta(x_0, t) \geqslant \varphi(t)$ pour tout $t \in [0, b]$ alors, pour tout $t \in]0, b]$ la fonction $\theta(\cdot, t) : x \to \theta(x, t)$ est strictement décroissante sur $[0, x_0]$.

On admettra, pour la suite, que $\theta(x, t)$ est continue en (x, t) et que $\theta^{(n)}(x, t) = \frac{\partial^n \theta}{\partial x^n}(x, t)$ est de classe C^1 en (x, t) (c'est-à-dire a des dérivées partielles en t et en x continues en (t, x)) ce qui permettra d'intervertir l'ordre des dérivations en t et en x (bien que *non exigé*, il serait souhaitable que le candidat justifie l'interversion de l'ordre des dérivations).

2° Donner l'équation différentielle en t (x fixé), valable pour tout $t \geqslant 0$, linéaire du premier ordre vérifiée par $\theta^{(1)}(x, t)$, $\theta(x, t)$ étant supposée connue.

3° Donner l'équation différentielle en t (x fixé), valable pour tout $t \geqslant 0$, linéaire du premier ordre vérifiée par $\theta^{(n)}(x, t)$ (exprimée à l'aide de $\theta^{(n-1)}(x, t)$ supposée connue), pour $n \geqslant 2$.

4° En déduire que :

$$\theta^{(n)}(x,t) = (-1)^n \int_0^t e^{-x(t-s)} (t-s)^n [\theta(x,s) - \varphi(s)]\, ds.$$

5° Sous les hypothèses de la question 1°, *b.*, donner l'allure du graphe de la fonction $x \to \theta(x,t)$ sur $[0, x_0]$ pour $t \in]0, b]$ fixé; on fera un graphique propre mais qui pourra être approximatif et qualitatif.

6° On suppose, dans cette question seulement, que φ est continûment dérivable. Montrer que si, pour tout $t \in [0, b]$ on a $\varphi'(t) \leqslant \psi(t)$ alors on a $\theta(x,t) > \varphi(t)$ pour tout $t \in [0, b]$ et tout $x \geqslant 0$ (on rappelle que $\theta_0 > \varphi(0)$).

7° On suppose, seulement dans cette question, qu'il existe deux constantes $\alpha < \beta < \theta_0$ telles que $\alpha \leqslant \varphi(t) \leqslant \beta$ pour tout $t \in [0, b]$.

Montrer que si $x \leqslant \dfrac{1}{b} \operatorname{Log}\left(\dfrac{\theta_0 - \alpha}{\beta - \alpha}\right)$ alors, pour tout $t \in [0, b]$ on a $\theta(x,t) \geqslant \varphi(t)$.

C

On veut désormais qu'à l'instant $b > 0$ le local soit à une température θ_b donnée. On suppose que durant l'intervalle de temps $[0, a]$ la chaudière est à l'arrêt (avec $0 \leqslant a \leqslant b$) et qu'un retardateur déclenche la chaudière à l'instant a avec une puissance de chauffe cp constante sur tout l'intervalle $[a, b]$, p représentant la puissance calorifique maximale de la chaudière et $c \in]0,1]$ un paramètre de commande sur lequel on peut agir lors d'un réglage effectué pour la période de temps considérée. On a donc : $\psi(t) = 0$ pour $t \in [0, a[$, $\psi(t) = cp$ pour $t \in [a, b]$. On note $d = b - a$ la durée de chauffe et l'on désigne par $E[c, d] = pcd$ l'énergie consommée. On supposera désormais le coefficient d'isolation, x, strictement positif.

1° Montrer que l'obligation de satisfaire $\theta(x, b) = \theta_b$ se traduit par la relation :

$$(R) \qquad \frac{cp}{x}(1 - e^{-xd}) = \theta_e(x)$$

où $\theta_e(x)$ est une fonction de x dont on donnera la signification.

2° Discuter, à x fixé, suivant les valeurs de $\theta_e(x)$ la possibilité de déterminer un couple $(c, d) \in]0, 1] \times [0, b]$ satisfaisant à cette relation. On traduira en termes concrets, faisant intervenir les données θ_0, θ_b et φ, cette discussion.

3° On supposera, pour le reste de la partie C, que :

$$0 < \theta_e(x) < \frac{p}{x}(1 - e^{-xb}).$$

Montrer que, pour x fixé, la relation (R) détermine de façon unique $d = g(c)$ comme fonction de c et $c = h(d)$ comme fonction de d. On précisera les fonctions g et h ainsi que leur domaine de définition.

4° Minimiser la fonction $d \to E[h(d), d]$ sur son intervalle de définition et exprimer sa valeur minimum $e(x, p)$ en fonction de $\theta_e(x)$, x et p (ainsi que θ_0 et θ_b supposés fixés dans la suite). On donnera les valeurs correspondantes pour c et d.

5° On considère la fonction $L(x, y, p) = -\dfrac{p}{x} \operatorname{Log}\left(1 - \dfrac{xy}{p}\right)$ définie sur l'ouvert $U = \{(x, y, p) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, xy < p\}$. Montrer que sur U on a :

$$\frac{\partial L}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} > 0, \quad \frac{\partial L}{\partial p} < 0.$$

6° On suppose que pendant tout l'intervalle de temps $[0, b]$ on a eu $\theta(x,t) > \varphi(t)$. Traduire en termes concrets l'influence des coefficients x et p dans l'énergie minimale $e(x, p)$ consommée pour atteindre le but fixé θ_b.

D

Dans cette partie on suppose la température extérieure constante et prise comme origine des températures ($\varphi = 0$). On dispose d'un régulateur opérant de la manière suivante pour maintenir la température entre les valeurs θ_0 et $\theta_0 + \sigma$ (avec $\theta_0 > 0$, $\sigma > 0$ donnés) : lorsque la température atteint $\theta_0 + \sigma$ le chauffage s'arrête; lorsque la température atteint θ_0 le chauffage se déclenche avec une puissance p maximale ($c = 1$) et chauffe constamment jusqu'à ce que la température du local atteigne $\theta_0 + \sigma$.

1° Discuter suivant les valeurs de p, x et σ la possibilité de faire fonctionner un tel régulateur (on rappelle que : $x > 0$).

2° On suppose désormais que $\theta_1 > \sigma$ où $\theta_1 = \dfrac{p}{x} - \theta_0$. Calculer le temps τ nécessaire à un cycle : chauffage pendant l'intervalle de temps de longueur ε, pour passer de θ_0 à $\theta_0 + \sigma$, atteinte de $\theta_0 + \sigma$, retour à θ_0. Donner l'expression de l'énergie consommée durant un tel cycle.

3° On désigne par $E[T]$ l'énergie consommée pendant un intervalle de temps de longueur T. Calculer $\lim_{T \to +\infty} \dfrac{E[T]}{T}$, quantité notée $W(\sigma)$ qui représente en fonction de σ (et des données θ_0, θ_1, p, x) l'énergie moyenne consommée par unité de temps.

4° Étudier la fonction $W(\sigma)$ sur son intervalle de définition $]0, \theta_1[$, (θ_0, p et x étant fixés) et conclure sur le meilleur choix de σ ainsi que sur l'énergie moyenne consommée par unité de temps correspondant à ce choix.